4. Taxas Relacionadas

Resolução por: Reinaldo Avelino

4.1. Dado que $r(t_0) = 6$ e $\frac{dr(t_0)}{dt} = 4$ e, sabendo que $A(r) = \pi r^2$ e

$$A(t) = \pi r^2(t) \Rightarrow \frac{dA(t_0)}{dt} = \pi . 2 . r(t_0) . \frac{dr(t_0)}{dt} = \pi . 2 . 6 . 4 = 48\pi \, m^2/s$$

4.2. Sabemos que $A(r) = 4\pi r^2 \Rightarrow A(t) = 4\pi r^2(t)$. Por derivação implícita:

$$A'(t_0) = 4\pi . 2 r(t_0) . r'(t_0) = 4\pi . 2 . 6 . 4 = 192\pi \, m^2/s$$

Ademais, $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$. Analogamente:

$$V'(t_0) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cancel{3} r^2(t_0) . r'(t_0) = 4\pi . 6^2 . 4 = 576\pi \, m^3/s$$

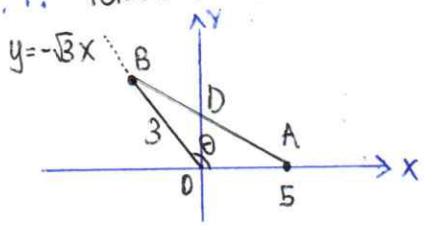
4.3. Se a área entre os círculos é cte, então: $A_2(t) - A_1(t) = 9\pi$.

Como isso vale para todo instante, logo: $A_2'(t) - A_1'(t) = 0 \Rightarrow A_1'(t) = A_2'(t) = 10\pi$

$$A_1(r) = \pi r_1^2 \Rightarrow A_1(t_0) = \pi r_1^2(t_0) \Rightarrow 16\pi = \pi . r_1^2(t_0) \Rightarrow r_1(t_0) = 4$$

$$\hookrightarrow A_1'(t_0) = \pi . 2 r_1(t_0) . r_1'(t_0) \Rightarrow 10\cancel{\pi} = \cancel{\pi} . 2 . 4 . r_1'(t_0) \Rightarrow r_1'(t_0) = \frac{5}{4} \, m/s$$

4.4. Temos: $r_A(t_0) = 5$, $r_A'(t_0) = 3$, $r_B(t_0) = 3$, $r_B'(t_0) = 4$



$\theta = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

$\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$

$\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

Lei dos Cossenos no ΔABO:

$$D^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$D^2 = 9 + 25 + 15$$

$$D^2 = 49 \Rightarrow \boxed{D(t_0) = 7}$$

Temos uma expressão válida em todo instante: $-1/2$

$$D^2(t_0) = r_A^2(t_0) + r_B^2(t_0) - 2 . r_A(t_0) . r_B(t_0) . \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$D^2(t_0) = r_A^2(t_0) + r_B^2(t_0) + r_A(t_0) . r_B(t_0)$$

Podemos utilizar derivação implícita:

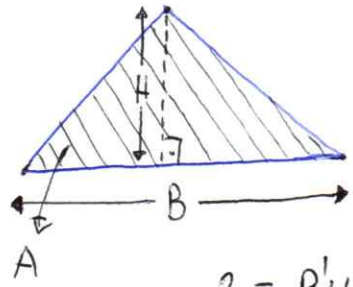
$$2 . D(t_0) . D'(t_0) = 2 . r_A(t_0) . r_A'(t_0) + 2 r_B(t_0) . r_B'(t_0) + r_A'(t_0) . r_B(t_0) + r_A(t_0) . r_B'(t_0)$$

$$2 . 7 . D'(t_0) = 2 . 5 . 3 + 2 . 3 . 4 + 3 . 3 + 5 . 4$$

$$14 D'(t_0) = 30 + 24 + 9 + 20$$

$$D'(t_0) = \frac{83}{14} \text{ unidades por segundo}$$

4.5. Temos que: $H'(t_0) = 1$, $A'(t_0) = 2$, $H(t_0) = 10$, $A(t_0) = 100$



$$A(t_0) = \frac{B(t_0).H(t_0)}{2} \Rightarrow 100 = \frac{B(t_0).10}{2} \Rightarrow \boxed{B(t_0) = 20}$$

derivação implícita

$$A'(t_0) = \frac{B'(t_0).H(t_0) + B(t_0).H'(t_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{B'(t_0).10 + 20.1}{2} \Rightarrow 4 = 10B'(t_0) + 20 \Rightarrow B'(t_0) = -\frac{8}{5} \text{ cm/min}$$

4.6. Temos que: $D(t) = 3.H(t)$; $H(t_0) = 1{,}2$, $V'(t_0) = 0{,}081$

O volume do cone é dado por: $V(t) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{D(t)}{2}\right)^2.H(t)$, pois $R(t) = \frac{D(t)}{2}$

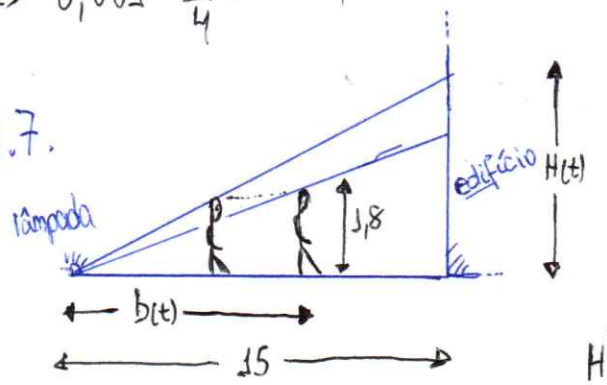
Logo: $V(t) = \frac{\pi.\cancel{9}^{3}.H^2(t).H(t)}{\cancel{3}.4} \Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{3}{4}\pi H^3(t)}$

* Não confunda com o volume de esfera. Trata-se de uma coincidência apenas.

Derivando ambos os lados: $V'(t_0) = \frac{3}{4}\pi.3.H^2(t_0).H'(t_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0{,}081 = \frac{3}{4}\pi.3.1{,}2^2.H'(t_0) \Rightarrow H'(t_0) = \frac{0{,}025}{\pi} \Rightarrow H'(t_0) = \frac{1}{40\pi} \text{ m/min}$$

4.7.



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{H(t)}{1{,}8} = \frac{15}{b(t)} \Rightarrow H(t) = \frac{27}{b(t)}$$

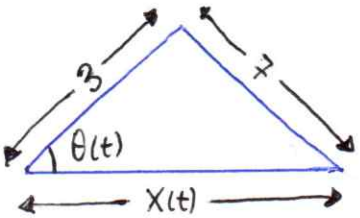
Por derivação implícita:

$$H'(t) = 27.\left(-\frac{b'(t_0)}{b^2(t_0)}\right) = -\frac{27b'(t_0)}{b^2(t_0)}$$

Em t_1: $b(1) = 15 - 12 = 3$. Logo: $H'(t_1) = -\frac{27.1{,}2}{3^2} = -3{,}6$ m/s $\therefore$ A sombra diminui 3,6 m/s

Em t_2: $b(2) = 15 - 9 = 6$. Logo: $H'(t_2) = -\frac{27.1{,}2}{6^2} = -0{,}9$ m/s $\therefore$ A sombra diminui 0,9 m/s

4.8.



Lei dos Cossenos quando $\theta(t_0) = \frac{\pi}{3}$

$$7^2 = 3^2 + X^2_{(t_0)} - 2.3.X_{(t_0)}.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$49 = 9 + X^2_{(t_0)} - 3X_{(t_0)}$$

$$X^2_{(t_0)} - 3X_{(t_0)} - 40 = 0$$

$\boxed{X_{(t_0)} = 8}$ ou $X_{(t_0)} = -5$ não convém

$$\theta'_{(t_0)} = \omega = 2\pi f$$

$$\theta'_{(t_0)} = 2\pi.\frac{20\cancel{0}}{6\cancel{0}} = \frac{20\pi}{3}$$

Lei dos Cossenos para $\theta(t)$ variando:

$$7^2 = 3^2 + X^2_{(t)} - 2.3.X_{(t)}.\cos\theta_{(t)}$$

$$49 = 9 + X^2_{(t)} - 6X_{(t)}.\cos\theta_{(t)}$$

$$X^2_{(t)} = 40 + 6X_{(t)}.\cos\theta_{(t)}$$

Por derivação implícita:

$$2X_{(t_0)}.X'_{(t_0)} = 6\left(X'_{(t_0)}.\cos\theta_{(t_0)} - X_{(t)}.\operatorname{sen}\theta_{(t_0)}.\theta'_{(t_0)}\right)$$

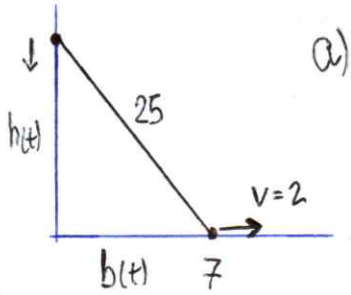
$$2.8.X'_{(t_0)} = 6\left(X'_{(t_0)}.\frac{1}{2} - 8.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$16X'_{(t_0)} = 3X'_{(t_0)} - 160\pi\sqrt{3}$$

$$X'_{(t_0)} = -\frac{160\pi\sqrt{3}}{13}\ cm/s$$

ou $X'_{(t_0)} = -\frac{9600\pi\sqrt{3}}{13}\ cm/min$ //

4.9.



a) O Teorema de Pitágoras é sempre válido:

$$25^2 = b^2_{(t)} + h^2_{(t)}$$

Por derivação implícita: $0 = 2.b(t_0).b'(t_0) + 2.h(t_0).h'(t_0)$

$$0 = 2.24.h'(t_0) + 2.7.2 \Rightarrow 12h'(t_0) + 7 = 0$$

$h'(t_0) = -\frac{7}{12}\ m/s$ ∴ A velocidade em módulo é de $\frac{7}{12}\ m/s$ //

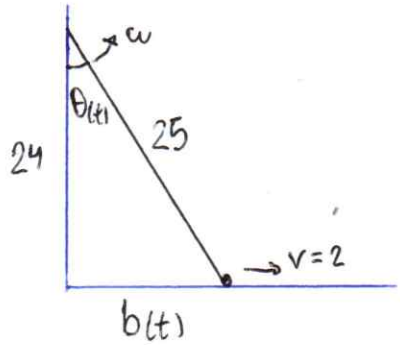
$$25^2 = 7^2 + h^2_{(t_0)}$$

$$625 = 49 + h^2_{(t_0)}$$

$$h^2_{(t_0)} = 576 \Rightarrow \boxed{h_{(t_0)} = 24}$$

b) $A_{(t)} = \frac{b_{(t)}.h_{(t)}}{2} \Rightarrow A'_{(t_0)} = \frac{b'_{(t_0)}.h_{(t_0)} + b_{(t_0)}.h'_{(t_0)}}{2} = \frac{2.24 + 7\frac{(-7)}{12}}{2} = \frac{527}{24}\ m^2/s$ //

c)

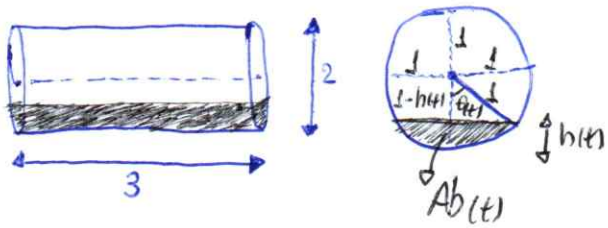


$\operatorname{sen}\theta_{(t)} = \frac{b_{(t)}}{25}$. Derivando implicitamente ambos os lados:

$$\cos\theta_{(t_0)}.\theta'_{(t_0)} = \frac{b'_{(t_0)}}{25}$$

$$\frac{24}{\cancel{25}}.\theta'_{(t_0)} = \frac{2}{\cancel{25}} \Rightarrow \theta'_{(t_0)} = \frac{1}{12}\ rad/s$$ //

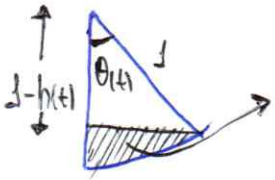
4.10.



$$\cos\theta(t) = \frac{1-h(t)}{1}$$

$$-\operatorname{sen}\theta(t_0).\theta'(t_0) = -h'(t_0)$$

$$\boxed{h'(t_0) = \operatorname{sen}\theta(t_0).\theta'(t_0)}$$



$$A(t) = A_{\text{setor circular}}(t) - A_{\text{triangulo}}(t) \Rightarrow A(t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}.\pi 1^2 - \frac{1}{2}(1-h(t))\operatorname{sen}\theta(t)$$

$$Ab(t_0) = 2\left(\frac{\theta(t)}{2\cancel{\pi}}.\cancel{\pi}.1^2 - \frac{1}{2}(1-h(t)).\operatorname{sen}\theta(t)\right) = \theta(t) - \operatorname{sen}\theta(t) + h(t).\operatorname{sen}\theta(t)$$

Derivando implicitamente:

$$Ab'(t_0) = \theta'(t_0) - \cos\theta(t_0).\theta'(t_0) + h'(t_0).\operatorname{sen}\theta(t_0) + h(t_0).\cos\theta(t_0).\theta'(t_0)$$

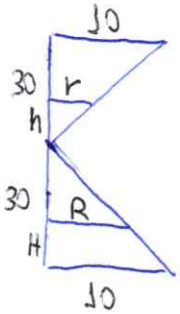
$$Ab'(t_0) = \theta'(t_0) - \frac{1}{2}\theta'(t_0) + \operatorname{sen}^2\theta(t_0).\theta'(t_0) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\theta'(t_0)$$

$$Ab'(t_0) = \frac{\theta'(t_0)}{2} + \frac{3}{4}\theta'(t_0) + \frac{1}{4}\theta'(t_0) = \frac{3\theta'(t_0)}{2}$$

Como $V(t_0) = Ab(t_0).3 \Rightarrow V'(t_0) = 3.Ab'(t_0) \Rightarrow 0{,}9 = 3.3\frac{\theta'(t_0)}{2} \Rightarrow \theta'(t_0) = 0{,}2\ \text{rad/min}$ //

E, $h'(t_0) = \operatorname{sen}\theta(t_0).\theta'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.0{,}2 \Rightarrow h'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{10}\ \text{m/min}$ //

4.11.



Por semelhanças de triângulos:

$$\frac{30}{10} = \frac{h(t_0)}{r(t_0)} \Rightarrow h(t_0) = 3r(t_0) \Rightarrow 10 = 3r(10) \Rightarrow \boxed{r(t_0) = \frac{10}{3}}$$

$$h'(t_0) = 3.r'(t_0) \Rightarrow -2 = 3.r'(t_0) \Rightarrow \boxed{r'(t_0) = -\frac{2}{3}}$$

$$\frac{30-H(t_0)}{10} = \frac{30-H(t_0)}{R(t_0)} \Rightarrow (30-H(t_0)) = 3.R(t_0) \Rightarrow 30-8 = 3R(t_0) \Rightarrow \boxed{R(t_0) = \frac{22}{3}}$$

$$-H'(t_0) = 3R'(t_0) \Rightarrow \boxed{R'(t_0) = -\frac{H'(t_0)}{3}}$$

Sabemos que $|v'(t_0)| = |V'(t_0)|$ e $v(t) = \frac{1}{3}\pi r^2(t_0).h(t_0)$ e $V(t) = \frac{1}{3}\pi.10^2.30 - \frac{1}{3}\pi R(t_0)^2(30-H$

Logo: $\frac{1}{3}\pi(2.r(t_0).r'(t_0).h(t_0) + r^2(t_0).h'(t_0)) = +\frac{1}{3}\pi(2R(t_0).R'(t_0)(30-H(t_0)) + R^2(t_0).(-H'(t_0)))$

$$2.\frac{10}{3}.\frac{(-2)}{3}.10 + \frac{100}{9}.(-2) = +\left(2.\frac{22}{3}.\frac{(-H'(t_0))}{3}.22 + \frac{22^2}{9}(-H'(t_0))\right)$$

$$+400 + 200 = 968H'(t_0) + 484H'(t_0)$$

$$1452H'(t_0) = +600 \Rightarrow H'(t_0) = +\frac{50}{121}\ \text{cm/min}$$ //

∴ Como o volume da parte inferior aumenta

$$H'(t_0) = +\frac{50}{121}\ \text{cm/min}$$ //